

# СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К ОПТИМИЗАЦИИ ОДНОКАСКАДНЫХ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОДУЛЕЙ

Драбкин И.А.<sup>1</sup>, Ершова Л.Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт Химических Проблем Микроэлектроники, Москва, Россия

<sup>2</sup> ЗАО «РМТ», Москва, Россия

тел: +7-495-132-6817 факс: +7-495-132-5870

e-mail: [rmtcom@dol.ru](mailto:rmtcom@dol.ru) <http://www.rmtltd.ru>

Долгое время все расчеты термоэлектрических охладителей проводились с использованием простейшей модели, предполагающей независимость термоэлектрических параметров от температуры (см., например, [1]). Такая модель рассматривает в качестве первичного элемента термоэлектрическую ветвь и дает простые алгебраические выражения для нахождения оптимальных режимов работы. Достоинством этой модели является простота и наглядность. Небольшие усложнения этой модели, связанные с введением эффективных термоэлектрических параметров [2,3] (далее будем ссылаться как на *метод эффективных параметров*, *метод ЭП*), позволяют точно учесть тепловые балансы на концах ветви, сохраняя простоту и наглядность в качестве основных преимуществ.

Математически строгий учет температурных зависимостей был осуществлен с использованием *метода максимума Понтрягина (метода МП)* в работах [4,5]. Этот метод дает математически формализованные рецепты нахождения оптимальных решений, из-за чего связь между термоэлектрическими параметрами и оптимальными режимами выглядит весьма опосредованной. Сильной стороной этого метода является то, что в качестве первичного звена может выступать не ветвь, а термоэлемент.

В данной работе проводится сравнение результатов расчетов термоэлектрических охладителей в рамках модели эффективных параметров и метода максимума и показывается, что они дают близкие результаты.

Работа ветви термоэлемента обычно описывается уравнением теплопроводности с температурно-зависимыми коэффициентами в одномерном приближении. Для численного решения это уравнение второго порядка удобно привести к системе двух уравнений первого порядка, выбирая в качестве одного независимого переменного температуру  $T(x)$ , а в качестве второго – величину

$q$ , пропорциональную  $\pm \kappa(T) \frac{dT(x)}{dx} + \alpha(T)jT(x)$ , где  $\kappa(T)$  - теплопроводность,

$\alpha(T)$  - термоэдс,  $j$  - плотность тока, и двойной знак перед членом с  $\frac{dT(x)}{dx}$

связан с выбором направления оси  $x$ . Такой выбор в качестве второго переменного  $q$  удобен тем, что на концах ветви его величина оказывается

пропорциональной либо холодопроизводительности  $Q_0$ , либо теплопроизводительности  $Q$  в зависимости от того, теплопоглощающий или тепловыделяющий конец ветви рассматривается. Будем считать далее, что ветвь имеет единичное сечение и длину, горячему концу ветви соответствует начало координат, тогда холодному – единица. Плотность тока, независимо от его направления, будем считать  $j > 0$ , а термоэдс относительно материала контакта  $\alpha \geq 0$ , независимо от ее истинного знака. Тогда для ветви термоэлемента систему уравнений первого порядка, к которой приводится уравнение теплопроводности, можно записать в виде:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{j}{\kappa} q - \frac{j\alpha T}{\kappa},$$

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{j}{\sigma} + \frac{\alpha j}{\kappa} q - \frac{j\alpha^2}{\kappa} T, \quad (1)$$

где  $\sigma$  - электропроводность, а  $q = \frac{\kappa \frac{dT}{dx} + \alpha j T(x)}{j}$ . Систему (1) надо решать при граничных условиях  $q(0) = Q/sj$ ,  $q(1) = Q_0/sj$ , где  $s$  - сечение ветви.

В случае задачи Коши необходимо задать  $T$  и  $q$  на одном из концов ветви, и во всех языках программирования можно найти стандартные программы для решения такого типа задач (например, для Turbo Pascal он приведен в книге [6]). В термоэлектрических задачах обычно задаются температуры горячего  $T_h$  и холодного  $T_c$  концов ветви. Для сведения такой задачи к задаче Коши обычно применяется так называемый метод «стрельбы», для которого также имеются стандартные программы [6]. Интерполяционные программы, позволяющие построить температурные зависимости термоэлектрических параметров по экспериментальным точкам также можно найти в любом языке программирования. Поэтому само по себе решение уравнения теплопроводности для термоэлектрической ветви не представляет значительных трудностей.

Основная проблема термоэлектричества заключается в оптимизации полученных решений. Обычно необходимо оптимизировать ток, т.е. найти  $j_{opt}$ , такой чтобы тепловой коэффициент  $\mu$ :

$$\mu = \frac{Q}{Q_0} = \frac{q(0)}{q(1)}, \quad (2)$$

достигал своего минимума  $\mu_{min}$ .

Наиболее математически последовательным методом оптимизации (1) является метод МП [7], в котором вводятся сопряженные к  $T$  и  $q$  переменные  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , а затем строится Гамильтониан  $H$ :

$$H = \psi_1 \frac{dT}{dx} + \psi_2 \frac{dq}{dx}, \quad (3)$$

из которого находятся уравнения движения для  $\psi_1$  и  $\psi_2$ :

$$\frac{d\psi_1}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial T}, \quad \frac{d\psi_2}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (4)$$

Ищется решение, которое минимизирует (2), и, исходя из этого, строятся граничные условия для сопряженных переменных из условия трансверсальности. При необходимости в них учитываются дополнительные ограничения на работу ветви. В этом случае количество уравнений, необходимое для описания работы ветви удваивается, что, впрочем, не создает особых трудностей для их решения. Приравняв Гамильтониан к нулю в любой  $(\cdot)x$  можно найти оптимальное управление. При решении термоэлектрических задач, связанных с охлаждением, для заданных ветвей оптимизация сводится к определению одного параметра  $j_{opt}$ , который дается для ветви выражением:

$$j_{opt} = \frac{\psi_2 \alpha T|_0^l}{\int_0^l \left[ \left( \frac{\psi_2}{\sigma} (1 - ZT) - \frac{q\psi_1}{\kappa} \right) + \frac{\psi_2 T}{\kappa} \frac{d\alpha}{dT} (q - \alpha T) \right] dx} \quad (5)$$

где  $Z(x) = \frac{\alpha(T(x))^2 \sigma(T(x))}{\kappa(T(x))}$  - термоэлектрическая эффективность.

Важно отметить, что выражение несколько отличается от приводимого в работе [4].

Так как с помощью метода МП удобно оптимизировать не ветвь, а термоэлемент, то система (1) удваивается, при этом вводятся переменные  $T$  и  $q$  для каждого типа проводимости. Соответственно, в Гамильтониане (3) проводится суммирование по типам проводимости, количество сопряженных переменных  $\psi_1$  и  $\psi_2$  также удваивается в согласии с типом проводимости. Уравнения движения (4) пишутся отдельно для каждого типа, а в (5) суммирование по типам проводимости проводится и в числителе, и знаменателе.

Перейдем теперь к методу ЭП. В случае температурно-независимых термоэлектрических переменных нет необходимости находить распределение температур вдоль ветви термоэлемента, достаточно рассмотреть простые алгебраические уравнения теплового баланса на концах ветви, из которых очень просто находится  $j_{opt}$ . В случае температурно-зависимых термоэлектрических переменных было показано [2,3], что для уравнений теплового баланса на концах ветви можно получить аналогичные выражения:

$$\alpha_c T_c j - \frac{1}{2} j^2 \rho_c - \kappa_{eff} \Delta T = q(I),$$

$$\alpha_h T_h j + \frac{1}{2} j^2 \rho_h - \kappa_{eff} \Delta T = q(0),$$
(6)

где  $\Delta T = T_h - T_c$ , а  $\alpha_h, \alpha_c, \rho_h, \rho_c$  для ветви единичной длины и сечения определяются следующим образом:

$$\kappa_{eff} = \bar{\kappa} = \frac{I}{\int_0^I \frac{dx}{\kappa(T_x)}} \quad (7)$$

$$\alpha_c = \alpha(T_c) + \frac{\bar{\kappa}}{T_c} \int_0^I T_y \frac{d\alpha(T_y)}{dT} \frac{dT}{dy} dy \int_y^I \frac{dx}{\kappa(T_x)} \quad (8)$$

$$\alpha_h = \alpha(T_h) - \frac{\bar{\kappa}}{T_h} \int_0^I T_y \frac{d\alpha(T_y)}{dT} \frac{dT}{dy} dy \int_0^y \frac{dx}{\kappa(T_x)} \quad (9)$$

$$\rho_c = 2\bar{\kappa} \int_0^I \rho(T_y) dy \int_y^I \frac{dx}{\kappa(T_x)} \quad (10)$$

$$\rho_h = 2\bar{\kappa} \int_0^I \rho(T_y) dy \int_0^y \frac{dx}{\kappa(T_x)} \quad (11)$$

Эти выражения отличаются от предложенных ранее Бурштейном [8] тем, что они являются точными, а не ограничиваются случаем постоянства теплового потока вдоль ветви. Из пяти величин (7)-(11) независимыми являются только три, т.к.  $\alpha_c$  и  $\alpha_h$  связаны соотношением:

$$\alpha_h T_h - \alpha_c T_c = \bar{\alpha} \Delta T = \int_{T_c}^{T_h} \alpha(T) dT \quad (12)$$

а  $\rho_c$  и  $\rho_h$  связаны как:

$$\rho_h + \rho_c = 2\bar{\rho} = 2 \int_0^I \rho(T_x) dx \quad (13)$$

Для вычисления этих параметров предварительно необходимо решить систему (1), а затем уже вычислить интегралы, входящие в (7) – (11). Следует подчеркнуть, что система (6), описывающая поведение ветви, является точной. Теплота Томсона проявляется в том, что значения эффективных параметров  $\alpha_c$  и  $\alpha_h$  отличаются друг от друга, а тот факт, что тепловые потоки от тепла Джоуля делятся не поровну между концами ветви, приводит к различию в величинах  $\rho_c$  и  $\rho_h$ . Оптимальный ток для ветви с заданными  $T_h$  и  $T_c$  определяется как:

$$j_{opt} = \frac{\bar{\alpha} \Delta T}{\bar{\rho}(M_{eff} - I)} \quad (14)$$

где  $M_{eff}$  равно:

$$M_{eff} = \sqrt{1 + ZT_{eff}}, \quad Z = \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\rho}\bar{\kappa}} \quad (15)$$

а эффективное значение температуры:

$$T_{eff} = \frac{T_c \frac{\alpha_c}{\bar{\alpha}} \frac{\rho_h}{\bar{\rho}} + T_h \frac{\alpha_h}{\bar{\alpha}} \frac{\rho_c}{\bar{\rho}}}{2} = T_c \frac{\alpha_c}{\bar{\alpha}} + \frac{\Delta T}{2} \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = T_h \frac{\alpha_h}{\bar{\alpha}} - \frac{\Delta T}{2} \frac{\rho_h}{\bar{\rho}} \quad (16)$$

Уравнения теплового баланса для термоэлемента аналогичны уравнениям для ветви:

$$\begin{aligned} (\alpha_{cn} + \alpha_{cp}) I_c j - \frac{1}{2} j^2 (\rho_{cn} + \rho_{cp}) - (\kappa_{effn} + \kappa_{effp}) \Delta T &= q_n(I) + q_p(I), \\ (\alpha_{hn} + \alpha_{hp}) I_h j + \frac{1}{2} j^2 (\rho_{hn} + \rho_{hp}) - (\kappa_{effn} + \kappa_{effp}) \Delta T &= q_n(0) + q_p(0), \end{aligned} \quad (17)$$

где индекс  $n, p$  относится к типу проводимости ветви, а  $\alpha_{cn}, \alpha_{cp}, \rho_{cn}, \rho_{cp}, \kappa_{effn}, \kappa_{effp}$  описывается формулами аналогичными (7)-(11) с учетом типа проводимости. Соответственно  $\bar{\alpha}, \bar{\rho}, \bar{\kappa}$  являются суммами средних величин для  $n$ - и  $p$ - ветвей. Выражения (14)-(16) также справедливы для термоэлемента с вышеописанной заменой.

В дальнейших вычислениях  $\mu_{min}, q(0), q(I)$  находим непосредственно из решения уравнений (1) или (17), а не вычислялись их по каким-либо приближенным формулам, т.к. зная  $j_{opt}$ , при решении уравнения теплопроводности можно получить их значения с желаемой степенью точности.

Для численных расчетов температурные зависимости термоэлектрических параметров материалов твердых растворов на основе халькогенидов висмута-сурьмы аппроксимировались по экспериментальным точкам полиномами третьей степени по температуре. Для того, чтобы иметь возможность строить кривые для любой концентрации носителей заряда, коэффициенты разложения по температуре для различных концентрации также аппроксимировались полиномами третьей степени по термоэдс материала при комнатной температуре -  $|\alpha^{300}|$ . Таким образом, для любой величины  $|\alpha^{300}|$  в пределах 200 – 290 мкВ/К были построены температурные зависимости термоэлектрических параметров для температур 150 – 330 К. Все расчеты охладителей проводились с аппроксимированными таким образом кривыми.

Расчеты как методом МП, так и методом ЭП проводились методом последовательных приближений. Т.е. для выбранного из каких-либо соображений тока в нулевом приближении  $j_{opt}^{(0)}$  решалась система (1) или (17), вычислялось новое значение оптимального тока по (5) для метода Понтрягина и по (14) для метода эффективных значений. Далее с этим новым значением тока вновь решались уравнения и вновь вычислялись значения оптимального тока.

Вычисления проводились до тех пор, пока различие между последовательными приближениями отличалось не более чем на 0,2%, так как это дает различие в холодильном коэффициенте, выходящее за рамки точности определения термоэлектрических параметров. В качестве нулевого приближения для  $j_{opt}^{(0)}$  удобно брать значение тока, вычисляемого в соответствии с (14), но среднее значение любого термоэлектрического параметра  $\bar{p}$  вычисляется как:

$$\bar{p} = \frac{p(T_h) + p(T_c)}{2} \quad (18)$$

а эффективное значение температуры в нулевом приближении:

$$T_{eff} = \frac{T_h + T_c}{2} \quad (19)$$

Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица

Сравнение результатов расчета оптимальных режимов работы термоэлемента методом Понтрягина и методом эффективных параметров.

$T_c, K$	$T_h, K$	$ \alpha_n^{300} , \text{ мкВ/К}$	$\alpha_p^{300}, \text{ мкВ/К}$	Расчет по методу максимума		Расчет по методу эффективных коэффициентов	
				$j_{opt}, \text{ А/см}^2$	$\mu$	$j_{opt}, \text{ А/см}^2$	$\mu$
250	300	210	210	31,126	4,185	31,263	4,165
220	250	230	230	21,88	3,012	22,516	3,014
250	300	210	230	26,986	4,156	28,698	4,155
220	250	230	250	18,751	3,061	20,366	3,052

Из приведенной таблицы видно, что расчет и тем и другим способом дает для  $\mu$  весьма близкие значения, отличающиеся друг от друга на доли процента. В то же время значения оптимальных токов заметно (почти на 10%) различны. Это связано с тем, что для рассматриваемого диапазона температур минимум  $\mu$  в зависимости от тока очень пологий, и поэтому трудно требовать большей точности, учитывая многостадийный способ получения оптимальных токов. При практической разработке термоэлектрических модулей это не должно приводить к каким либо существенным отрицательным последствиям, т.к. отличие расчетных токов скажется лишь на числе ветвей модуля из-за различия в величинах холодопроизводительности термоэлемента.

Вопрос точности вычислений тепловых коэффициентов весьма существенен при практических расчетах термоэлектрических модулей, но переоценивать точность расчетов не имеет смысла, т.к. сами по себе термоэлектрические ветви не идентичны по своим свойствам, поэтому для

каждой ветви (термоэлемента) имеется свой оптимальный ток. Благодаря пологой зависимости  $\mu(j)$  это расхождение по величинам оптимальных токов не приводит к большому различию в величине  $\mu$ , и поэтому достигаемой точности вычислений вполне достаточно.

Так как в расчетах модулей обычно выступают температурные зависимости термоэлектрических параметров, аппроксимируемые полиномами, то можно такие же полиномиальные аппроксимации использовать и в отношении  $\alpha_{cn}, \alpha_{cp}, \rho_{cn}, \rho_{cp}, K_{effn}, K_{effp}$  в оптимальных режимах. Тогда расчеты модулей станут более наглядными и будет легче проследить связь между исходными свойствами материала и конечным результатом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнер А.Л., ред. Термоэлектрические охладители, Радио и связь, Москва, 1983, стр. 127-132
2. Drabkin I., Dashevsky Z. Proc. of fifth European workshop on thermoelectrics, Pardubice, 1999, p. 154.
3. Драбкин И.А., Дашевский З.М., Термоэлектрики и их применение, С.-Петербург, 2000 г, стр. 292-297.
4. Семенюк В.А. Каскадный термоэлектрический охладитель как объект оптимального управления, Инженерно-физический журнал, 1984, т. 47, № 6, стр. 977-978.
5. Анатычук А.И., Семенюк В.А. Оптимальное управление свойствами термоэлектрических материалов и приборов, Черновцы, «Прут», 1992, стр. 159-177.
6. Немнюгин С.А. Turbo Pascal. Программирование на языке высокого уровня, «Питер Принт», 2005, стр. 544.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М, Наука, 1976, стр. 13-132.
8. Бурштейн А.И. Физические основы расчета полупроводниковых термоэлектрических устройств. М, Физматгиз, 1962, стр. 64-78.